

ТРИГУБ О.С.

Національний університет «Києво-Могилянська Академія»

СТЕЛЯ О.Б.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

РІЗНИЦЕВА СХЕМА МЕТОДУ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ ПЕРЕНОСУ

Розглядається модельне рівняння переносу з постійними коефіцієнтами

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (1)$$

яке описує зміну за часом t концентрації $C(x, t)$ розчиненого в рідині мігранта, який фільтрується зі швидкістю V при наявності дифузії з коефіцієнтом D

Добре відомі обчислювальні труднощі, пов'язані з чисельними методами розв'язання такого рівняння. Розрахунки за більшістю загальновживаних різницевих схем для рівняння (1) можливі лише за умов досить жорстких обмежень на кроки просторової та часової сіток (інакше в чисельному розв'язку з'являються або нефізичні осциляції, пов'язані з порушенням принципу максимуму для різницевого рівняння, або занадто велика схемна дифузія; в обох випадках точність отриманого розв'язку є незадовільною).

Разом з тим відомі результати, які свідчать про доцільність застосування до розв'язання рівняння (1) чисельного методу характеристик, основні положення якого викладені в роботах [1,2]. Суть методу полягає в розщепленні в процесі обчислень розрахунку конвективного та дифузійного членів рівняння (1), та розрахунку конвекції на рухомих (лагранжевих) та дифузії на нерухомих (ейлеревих) сітках.

Побудована у відповідності з методом характеристик різницева схема, яка апроксимує рівняння (1) в момент часу $t^n = (n-1) \cdot \tau$, $n = 1, 2, \dots$, на просторовій сітці $x_i = (i-1) \cdot h$, $i = 1, 2, \dots, N$ має вигляд

$$\frac{U_i^n - U^{n-1}(P)}{\tau} = D \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2}, \quad (2)$$

де $U^{n-1}(P)$ - значення шуканої функції в момент часу t^{n-1} в такій точці P , яка в момент часу t^n потрапляє у вузол сітки x_i . Значення концентрації в точці $U^{n-1}(P)$ визначається інтерполяцією по сусіднім вузлам сітки.

В роботі [1] були досліджені дві процедури інтерполяції, - лінійна та квадратична. Показано, що метод характеристик з лінійною інтерполяцією має схемну дифузію (метод має перший порядок точності), тоді як застосування квадратичної інтерполяції призводить до відсутності схемної дифузії (другий порядок точності). Але в будь-якому разі вплив інтерполяції на зниження точності методу залишається.

Продовженням робіт авторів в цьому напрямку є побудова різницевої схеми методу характеристик для чисельного розв'язання рівняння (1), позбавлена необхідності застосовувати будь-яку процедуру інтерполяції. Пропонується в якості значення $U^{n-1}(P)$ шуканої функції в момент часу t^{n-1} брати значення точного розв'язку рівняння (1), яке має наступний вигляд:

$$C(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp \left\{ \frac{-(x-0,2-Vt)}{D(4t+1)} \right\}, \quad (3)$$

тобто $U^{n-1}(P) = C(x, t)$. У випадку постійних коефіцієнтів $P = x_i - Vt$.

Такий підхід дає можливість, з одного боку, зберегти всі переваги методу характеристик щодо розв'язання рівняння (1), та, з іншого, ще підвищити точність даного класу методів за рахунок зменшення загальної похибки методу (необхідність в інтерполяції зникає).

Зауважимо, що в методах характеристик з використанням інтерполяції також можна досягати підвищеної точності, - при цілих числах Куранта $Cu = \frac{V\tau}{h}$ (де τ, h - кроки часової та просторової дискретизацій відповідно). Це якраз і пояснюється тим, що в цьому випадку необхідність в інтерполяції зникає, тому що $P = x_i - Cu$. Але при проведенні практичних розрахунків забезпечення цієї умови вимагає додаткових обчислень для кожного з вузлів просторової сітки, що призводить до зниження ефективності даного класу методів. Запропонована ж різницева схема дає змогу отримувати високі результати точності без проведення таких додаткових обчислень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Douglas J. Jr., Russel T.K. Numerical methods for convection dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures. SIAM J. Numer. Anal. 1982, № 5. - P.871-885.
2. Демченко В.Ф. Разностные схемы для уравнения конвективной диффузии. Тр. Международн. Совещания «Моделирование в ядерной -энергетике». Варна, 1982, ч.1.- С.24[^]19.
3. Тригуб О.С. Аналіз застосування методу сіток до чисельного розв'язання параболічних рівнянь // Наукові записки. - 2003. - Том 21. Комп'ютерні науки. - С. 22-30.